2022 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（一）模拟卷三解析

一、选择题

【答案】（1）D（2）B（3）C（4）A（5）B（6）A（7）D（8）D（9）B（10）C

二、填空题

（11）【答案】 $\ln 2-\dfrac{1}{2}$ （12）【答案】 $(0,0,\dfrac{2}{3})$

（13）【答案】 $\dfrac{1}{3}$ （14）【答案】 $\dfrac{\pi}{8}$.

（15）【答案】 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ （16）【答案】 $\dfrac{1}{2}$

三、解答题

（17）（本题满分 10 分）

【解】（Ⅰ）由已知，可得 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-2$

在 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-2$ 两端同时对 x 进行积分，得 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2x+C_1(y)$

由 $\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,y)}=4y^3-2y,$，得 $C_1(y)=4y^3-2y$，故 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2x+4y^3-2y$

再对 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2x+4y^3-2y$ 两边同时对 y 积分，得 $z=z(x,y)=-2xy+y^4-y^2+C_2(x)$

由 $z(x,0)=x^4-x^2$, 得 $C_2(x)=x^4-x^2$，故 $z=z(x,y)=-2xy+y^4-y^2+x^4-x^2$

（Ⅱ）令 $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=4x^3-2x-2y=0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=4y^3-2x-2y=0 \end{cases}$ 解得驻点为 $(0,0),(1,1),(-1,-1)$。

又 $A=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2-2$，$B=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2$，$C=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=12y^2-2$

对于点 $(1,1),(-1,-1)$，有 $A=10>0,B=-2,C=10$，则 $B^2-AC<0$，

故 $z(x,y)$ 在 $(1,1),(-1,-1)$ 处取得极小值 $z=-2$。

对于点 $(0,0)$，有 $A=-2<0,B=-2,C=-2$ 则 $B^2-AC=0$，故需要用定义判断。

在点 $(0,0)$ 的去心领域内，取 $y=x$ 与 $y=-x$，则

$z(x,x)=2x^2(x^2-2)<0=z(0,0)$，$z(x,-x)=2x^4>0=z(0,0)$，综上 $(0,0)$ 不是 $z(x,y)$ 的极值点。

（18）（本题满分 12 分）设 $a_n=\int_0^{n\pi}x\left|\sin x\right|dx,n=1,2,\cdots,$ 试求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{2^n}$ 的值

【解析】 $a_n=\int_0^{n\pi}x\left|\sin x\right|dx=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}x\left|\sin x\right|dx\overset{t=x-k\pi}{=}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}(k\pi+t)\left|\sin(k\pi+t)\right|dt$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}(k\pi+t)\sin t\,dt=\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)\pi=\pi\cdot\frac{n(1+2n-1)}{2}=n^2\pi$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{2^n}=\pi\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

记 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n,-1<x<1$，则

$S(x)=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}=x\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n\right)'=x\left(x\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\right)'$，

记 $S_1(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=\left(\dfrac{x}{1-x}\right)'=\dfrac{1}{(1-x)^2}$，

故 $S(x)=x\left[\dfrac{x}{(1-x)^2}\right]'=\dfrac{x(1+x)}{(1-x)^3}$，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{2^n}=\pi S\left(\dfrac{1}{2}\right)=6\pi$

（19）（本题满分 12 分）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$f(a)=a$，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$.

证明：（I）$\exists\xi\in(a,b)$ 内，使 $\xi=f(\xi)$；

（II）在 (a,b) 内存在与（I）中的 ξ 相异的点 η，使得 $f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$.

【证明】（I）由 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$ 可知 $\int_a^b[f(x)-x]\mathrm{d}x=0$，

记 $F(x)=f(x)-x$，那么函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，

若 $F(x)$ 在 (a,b) 无零点，那么 $x\in(a,b)$ 时恒有 $F(x)>0$（或者 $F(x)<0$），

相应的必有 $\int_a^b F(x)\mathrm{d}x>0$（或 <0）与 $\int_a^b[f(x)-x]\mathrm{d}x=0$ 矛盾，故 $F(x)$ 在 (a,b) 内必有零点，

即 $\exists\xi\in(a,b)$ 内，使 $\xi=f(\xi)$.

（II）令 $G(x)=\mathrm{e}^{-x}[f(x)-x]$，则有 $G(a)=G(\xi)=0$，

由罗尔定理知 $\exists\eta\in(a,\xi)$ 使得 $G'(\eta)=\mathrm{e}^{-\eta}[f'(\eta)-1]-\mathrm{e}^{-\eta}[f(\eta)-\eta]=0$，即有 $f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$.

（20）（本题满分 12 分）

计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}yz(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+zx(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+xy(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是上半球面

$z=\sqrt{4Rx-x^2-y^2}$（$R\geq1$）在柱面 $(x-\frac{3}{2})^2+y^2=1$ 之内部分的上侧.

【解析】记 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4Rx=0$（$z\geq0$），

则曲面 Σ 的法向量为 $\vec{n}=(x-2R,y,z)$，于是 $\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x-2R}=\frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{y}=\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z}$，

$$I=\iint\limits_{\Sigma}[yz(y-z)\frac{1}{z}(x-2R)+zx(z-x)\frac{y}{z}+xy(x-y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2R\iint\limits_{\Sigma}y(z-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

记曲面 Σ 在 xOy 平面上的投影区域为 $D:(x-\frac{3}{2})^2+y^2\leq1$，

$$\text{则 } I=2R\iint\limits_{\Sigma}y(\sqrt{4Rx-x^2-y^2}-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2R\iint\limits_{\Sigma}y(\sqrt{4Rx-x^2-y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y-2R\iint\limits_{\Sigma}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0-2R\iint\limits_{D}y^2dxdy,$$

令 $x=\frac{3}{2}+u$，$y=v$，记 $D_1:u^2+v^2\leq1$，

则 $I=0-2R\iint\limits_{D_1}v^2\mathrm{d}u\mathrm{d}v=-2R\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\sin^2\theta\mathrm{d}\rho=-\frac{1}{2}\pi R$.

（21）（本题满分 12 分）

【解析】（1）由 $A\sim B$，知 $\begin{cases}5=a+5\\3=4a+c\end{cases}$ 解得 $a=0,c=3$.

由 $|\lambda E-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-3)=0$，知 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=3.$，故 B 的特征值也为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=3.$

又 A 是实对称矩阵，则 A 可对角化，由 $A\sim B$ 可得 B 也可对角化，故 $r(E-B)=1$，解得 $b=-2$.

（2）由 $(E-A)x=0$ 得特征向量 $\alpha_1=(-1,1,0)^T,\alpha_2=(0,0,1)^T$.

由 $(3E-A)x=0$ 得特征向量 $\alpha_3=(1,1,0)^T$.

令 $P_1=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则 $P_1^{-1}AP_1=\Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&3\end{pmatrix}$.

由 $(E-B)x=0$ 得特征向量 $\beta_1=(-2,1,0)^T,\beta_2=(3,0,1)^T$.

由 $(3E-B)x=0$ 得特征向量 $\beta_3=(1,0,1)^T$.

令 $P_2=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，则 $P_2^{-1}BP_2=\Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&3\end{pmatrix}$.

令 $P=P_1P_2^{-1}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&-1&\frac{3}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-2&\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}&0&\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=B$.

22.（本题满分 12 分）

【解析】（1） X 的分布函数为 $F(x;\theta)=\int_{-\infty}^{x}f(t;\theta)dt=\begin{cases}0 & x<0\\ \theta x & 0\le x<1\\ \dfrac{1-\theta}{3}x+\dfrac{4\theta-1}{3} & 1\le x<4\\ 1 & x\ge 4\end{cases}$

（1）参数 θ 的似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\dfrac{1}{3^7}\theta^3(1-\theta)^7$

取对数 $\ln L(\theta)=-7\ln 3+3\ln\theta+7\ln(1-\theta)$

令 $\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\dfrac{3}{\theta}-\dfrac{7}{1-\theta}=0$，可得 θ 的最大似然估计 $\hat{\theta}=\dfrac{3}{10}$

（2） $b=P\{X\ge 2\}=\int_{2}^{4}\dfrac{1}{3}(1-\theta)dx=\dfrac{2}{3}(1-\theta)$

注意 b 到是参数 θ 的单调减函数，则 b 的最大似然估计为 $\hat{b}=\dfrac{2}{3}(1-\hat{\theta})=\dfrac{7}{15}$