# 第三章 绝对值、平均值、比与比例

核心考点 1：绝对值的定义

（1）$|a|=\begin{cases} a, & a>0 \\ 0, & a=0 \\ -a, & a<0 \end{cases}$

（2）$|a|=a \Rightarrow a \ge 0$；$|a|=-a \Rightarrow a \le 0$；$|a|=0 \Rightarrow a=0$

1、（08-10-2）设 $a,b,c$ 为整数，且 $|a-b|^{29}+|c-a|^{41}=1$，则 $|a-b|+|a-c|+|b-c|=$（ ）.

A.2　　B.3　　C.4

D.-3　　E.-2

2、（08-10-16）$-1<x\le\frac{1}{3}$

（1）$\left|\frac{2x-1}{x^2+1}\right|=\frac{1-2x}{1+x^2}$　　（2）$\left|\frac{2x-1}{3}\right|=\frac{2x-1}{3}$

3、（08-10-20）$|1-x|-\sqrt{x^2-8x+16}=2x-5$

（1）$2<x$　　（2）$x<3$

4、（09-10-8）设 $y=|x-a|+|x-20|+|x-a-20|$，其中 $0<a<20$，则对于满足 $a\le x\le 20$ 的 $x$ 值，$y$ 的最小值是（ ）.

A. 10　　B. 15　　C. 20

D. 25　　E. 30

5、（11-10-24）已知 $g(x)=\begin{cases} 1, & x>0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$，$f(x)=|x-1|-g(x)|x+1|+|x-2|+|x+2|$，则 $f(x)$ 是与 $x$ 无关的常数

（1）$-1<x<0$　　（2）$1<x<2$

6、（20-1-2）设 $A=\{x||x-a|<1,x\in R\}$，$B=\{x||x-b|<2,x\in R\}$ 则 $A\subset B$ 的充分必要条件是（　）

A. $|a-b|\leq 1$　　B. $|a-b|\geq 1$　　C. $|a-b|<1$

D. $|a-b|>1$　　E. $|a-b|=1$

核心考点 2：绝对值的定义

（1）$|x|$ 表示数轴上 $x$ 到原点的距离.

（2）绝对值、完全平方、算术平方根都是非负数，故当几个式子加在一起时等于 0 则，每个式子的值均为 0，称为 0 问题。应注意：绝对值是可以去掉的，完全平方是配凑出来的，算术平方根一般不化简.

1、（17-1-22）已知 $a,b,c$ 为三个实数，则 $\min\{|a-b|,|b-c|,|c-a|\}\leq 5$.

（1）$|a|\leq 5,|b|\leq 5,|c|\leq 5$

（2）$a+b+c=15$.

2、（11-1-2）若实数 $a,b,c$ 满足 $|a-3|+\sqrt{3b+5}+(5c-4)^2=0$，则 $abc=$（　）.

A. $-4$　　B. $-\frac{5}{3}$　　C. $-\frac{4}{3}$

D. $\frac{4}{5}$　　E. 3

3、（08-10-10）$|3x+2|+2x^2-12xy+18y^2=0$，则 $2y-3x=$（　）.

A. $-\frac{14}{9}$　　B. $-\frac{2}{9}$　　C. 0

D. $\frac{2}{9}$　　E. $\frac{14}{9}$

4、（09-1-15）已知实数 $a,b,x,y$ 满足 $y+\left|\sqrt{x}-\sqrt{2}\right|=1-a^2$ 和 $|x-2|=y-1-b^2$，则 $3^{x+y}+3^{a+b}=$（　）.

A.25　　B.26　　C.27　　D.28　　E.29

5、（09-10-18）$2^{x+y}+2^{a+b}=17$。

（1）$a,b,x,y$ 满足 $y+\left|\sqrt{x}-\sqrt{3}\right|=1-a^2+\sqrt{3}b$

（2）$a,b,x,y$ 满足 $|x-3|+\sqrt{3}b=y-1-b^2$

## 核心考点 3：绝对值的自反性

$$\frac{|x|}{x}=\frac{x}{|x|}=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

1、（08-1-30）$\dfrac{b+c}{|a|}+\dfrac{c+a}{|b|}+\dfrac{a+b}{|c|}=1$。

（1）实数 $a,b,c$ 满足 $a+b+c=0$　　（2）实数 $a,b,c$ 满足 $abc>0$

## 核心考点 4：绝对值的不等式

(1) $-|a|\le a\le |a|$

(2) $|a+b|\le |a|+|b|$； $ab\ge 0$ 取等.

(3) $|a-b|\le |a|+|b|$； $ab\le 0$ 取等.

1、（10-1-16）$a|a-b|\ge |a|(a-b)$

（1）实数 $a>0$　　（2）实数 $a,b$ 满足 $a>b$

2、（13-1-21）已知 $a,b$ 是实数，则 $|a|\le 1,|b|\le 1$.

（1）$|a+b|\le 1$　　（2）$|a-b|\le 1$

3、（15-1-24）已知$x_1,x_2,x_3$都是实数，$\overline{x}$为$x_1,x_2,x_3$的平均数，则$\left|x_k-\overline{x}\right|\le 1$，$k=1,2,3$.

（1）$\left|x_k\right|\le 1$，$k=1,2,3$　　　　（2）$x_1=0$

4、（21-1-19）设 a.b 为实数，则能确定$|a|+|b|$的值

（1）已知$|a+b|$的值

（2）已知$|a-b|$的值

5、（21-1-19）设 a.b 为实数满足$|a-2b|\le 1$，则能确定$|a|>|b|$的值

（1）$|b|>1$

（2）$|b|<1$

核心考点 5：两个特殊的绝对值函数

(1) 形如$|x-a|+|x-b|$的最小值为$|a-b|$无最大值，在$x\in[a,b]$取到最值.

(2) 形如$|x-a|-|x-b|$的最大值$|a-b|$与最小值$-|a-b|$，在$x\le a$或$x\ge b$取到最值.

1、（07-10-9）设$y=|x-2|+|x+2|$，则下列结论正确的是（　）.

A. $y$没有最小值

B.只有一个$x$使$y$取到最小值

C.有无穷多个$x$使$y$取到最大值

D.有无穷多个$x$使$y$取到最小值

E.以上结论均不正确

2、（08-1-18）$f(x)$有最小值 2

（1）$f(x)=\left|x-\frac{5}{12}\right|+\left|x-\frac{1}{12}\right|$

（2）$f(x)=|x-2|+|4-x|$

3、（22-1-17）设实数 $x$ 满足 $|x-2|-|x-3|=a$，则能确定 $x$ 的值。

（1）$0<a\le 1/2$；　　　　　　　　（2）$1/2<a\le 1$。

核心考点 6：平均值定义

（1）算术平均值：$n$ 个实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的算术平均值 $\overline{x}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$

（2）几何平均值：$n$ 正实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的几何平均值 $x_g=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$，

注意：几何平均值只对正实数有定义，而算术平均值对任何实数都有定义.

1.（07-10-17）　三个实数 $x_1,x_2,x_3$ 的算术平均数为 4。

（1）$x_1+6,x_2-2,x_3+5$ 的算术平均数为 4

（2）$x_2$ 为 $x_1$ 和 $x_3$ 的等差中项，且 $x_2=4$

2.（17-1-11）在 $1$ 到 $100$ 之间，能被 9 整除的整数的平均值为（　）.

A. 27　　B. 36　　C. 45

D. 54　　E. 63

3.（20-1-18）若 $a,b,c$ 是实数，则能确定 $a,b,c$ 的最大值.

（1）已知 $a,b,c$ 的平均值　　（2）已知 $a,b,c$ 的最小值.

核心考点 7：均值不等式

（1）均值不等式：当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 $n$ 个正实数时，它们的算术平均值不小于它们的几何平均值，即 $\overline{x}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\ge\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\left(x_i>0,i=1,\cdots,n\right)$ 当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时，等号成立。

（2）常用的均值不等式

$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}(a,b \in R^{+})$；

$\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}(a,b,c \in R^{+})$ $a+\frac{1}{a} \ge 2(a \in R^{+})$；

$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \ge 2(ab>0)$；

$a+\frac{1}{a} \le -2(a \in R^{-})$.

（3）均值不等式的应用

用基本不等式求函数最值时，先验证给定函数是否满足最值三条件：

①“一正”——各项为正；

②“二定”——和或积为定值（有时需通过“凑配法”凑出定值来）；

③“三相等”——等号能否取到；

（4）如遇分拆，必均分.

1、（08-1-10）直角边之和为 12 的直角三角形面积最大值等于（　）.

A.16　　B.18　　C.20

D.22　　E.以上都不是

2、（08-10-15）若 $y^2-2\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)y+3<0$ 对一切正实数 $x$ 恒成立，则 $y$ 的取值范围是（　）.

A. $1<y<3$　　B. $2<y<4$　　C. $1<y<4$

D. $3<y<5$　　E. $2<y<5$

3、（09-10-19）$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ 。

（1）$abc=1$　　（2）$a,b,c$ 为不全相等的正数

4、（19-1-2）设函数 $f(x)=2x+\frac{a}{x^2}(a>0)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 内的最小值为 $f(x_0)=12$，则 $x_0=$（　　）

A. 5　　B. 4　　C. 3　　D. 2　　E. 1

5、（20-1-25）设 $a,b$ 是正实数，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 存在最小值.

（1）已知 $ab$ 的值.　　（2）已知 $a,b$ 是方程 $x^2-(a+b)x+2=0$ 的不同实根.

## 核心考点 8：比例定义、比例性质

1、（08-10-1）若 $a:b=\frac{1}{3}:\frac{1}{4}$，则 $\frac{12a+16b}{12a-8b}=$（　）.

A. 2　　B. 3　　C. 4

D. -3　　E. -2

2、（13-10-3）如果 $a,b,c$ 的算术平均值等于 13，且 $a:b:c=\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}$，那么 $c=$（　）.

A．7　　B.8　　C.9

D.12　　E.18

3、（15-1-1）若实数$a,b,c$满足$a:b:c=1:2:5$，且$a+b+c=24$，则$a^2+b^2+c^2=$（　）.

A.30　　B.90　　C.120

D.240　　E.270

本章自我总结：