2023 数学一模拟测试题详解

（本试卷满分 150 分，考试时间 180 分钟）

一、选择题：1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）$x\to 0$时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$是比$x\sin x^n$高阶的无穷小，而$x\sin x^n$是比$e^{x^2}-1$高阶的无穷小，则正整数n等于（　　）

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

【答案】(B).

【解析】由于

$$\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)\ln(1+x^2)}{x\sin x^n}=0\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^4}{x^{n+1}}=0\Rightarrow\lim_{x\to0}x^{3-n}=0\Rightarrow3-n>0\Rightarrow n<3,$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x\sin x^n}{e^{x^2}-1}=0\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{x^{n+1}}{x^2}=0=\lim_{x\to0}x^{n-1}=0\Rightarrow n-1>0\Rightarrow n>1,$$

又因为n为正整数，故$n=2$.

（2）设函数$f(x)=\dfrac{x}{a+e^{bx}}$在$(-\infty,+\infty)$内连续，且$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，则常数$a,b$应满足（　　）

（A）$a<0,b<0$.　　（B）$a>0,b>0$.　　（C）$a\le0,b>0$.　　（D）$a\ge0,b<0$.

【答案】(D).

【解析】$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0\Rightarrow b<0; f(x)$连续$\Rightarrow a\ge0$.

（3）设曲线积分$\int_L[f(x)-e^x]\sin y dx-f(x)\cos y dy$与路径无关，其中$f(x)$具有一阶连续导数，且$f(0)=0,$ 则$f(x)$等于（　　）.

（A）$\frac{1}{2}(e^{-x}-e^x)$.　　（B）$\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$.　　（C）$\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})-1$.　　（D）$1-\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$.

【答案】:（B）.

【解析】:根据曲线积分的性质可知，

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}\Rightarrow -f'(x)=f(x)-e^x,$$

再由$f(0)=0,$ 可得$f(x)=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$,因此（B）为正确选项。

（4）已知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$分别收敛于$a,b$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$（　　）

（A）不一定收敛　　　　　　　（B）必收敛，和为 $2a+b$

（C）必收敛，和为 $a-2b$　　　　（D）必收敛，和为 $a+2b$

【答案】（D）

【解析】由级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛知，$\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

设 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$　$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的前 n 项和分别为 s_n,S_n,σ_n，则 $\lim_{n\to\infty}s_n=a,\lim_{n\to\infty}S_n=b$，

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=a_1-a_2+a_3-a_4\cdots-a_{2k}\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-2\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$$

对上式两侧同时取极限可得 $a=\sigma_n-2b$

所以 $\sigma_n=a+2b$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，和为 $a+2b$.

(5)设矩阵 A 与 $B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$ 相似，则 $r(A)+r(A-2E)=$（　）.

（A）3　　　　（B）4　　　　（C）5　　　　（D）6

【答案】（A）

【解析】矩阵 A 与 B 相似，则 $A-2E$ 与 $B-2E$ 相似，故 $r(A)+r(A-2E)=r(B)+r(B-2E)=2+1=3$.

（6）设 3 阶方阵 A 的特征值是 $1,2,3$，它们所对应的特征向量依次为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，令 $P=(3\alpha_3,\alpha_1,2\alpha_2)$，则 $P^{-1}AP=$（　）.

（A）$\begin{pmatrix}9&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$　（B）$\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　（C）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$　（D）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&9\end{pmatrix}$

【答案】(B)

【解析】因为$3\alpha_3,\alpha_1,2\alpha_2$分别为$A$的对应特征值$3,1,2$的特征向量，故$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

（7）下列矩阵中，A和B相似的是（　　）

（A）$A=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.　　（B）$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&3&1\\0&1&5\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&0\\-1&0&2\end{pmatrix}$.

（C）$A=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&0&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.　　（D）$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-3\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$

【答案】（C）.

【解析】（A）中，$r(A)=1,r(B)=2$，故A和B不相似.

（B）中，$tr(A)=9,tr(B)=6$，故A和B不相似.

（D）中，A的特征值为$2,2,-3$，B的特征值为$1,3,-3$，故A和B不相似.

由排除法可知：只有（C）中矩阵A和B可能相似.事实上，在（C）中，A和B的特征值均为$2,0,0$，由于A和B均可相似对角化，也即A和B均相似于$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，故$A$和$B$相似.故选（C）.

（8）设三个事件A,B,C满足$P(AB)=P(ABC)$，且$0<P(C)<1$，则(　　)

（A）$P(A\cup B|C)=P(A|C)+P(B|C)$　　（B）$P(A\cup B|C)=P(A\cup B)$

（C）$P(A\cup B|\overline{C})=P(A|\overline{C})+P(B|\overline{C})$　　（D）$P(A\cup B|\overline{C})=P(A\cup B)$

【答案】（C）.

【解析】按条件概率定义验证即可

选项（C）

$$P(A\cup B|\overline{C})=\frac{P((A\bigcup B)\overline{C})}{P(\overline{C})}=\frac{P(A\overline{C}\bigcup B\overline{C})}{P(\overline{C})}=\frac{P(A\overline{C})+P(B\overline{C})-P(AB\overline{C})}{P(\overline{C})}$$

$$=\frac{P(A\overline{C})+P(B\overline{C})-(P(AB)-P(ABC))}{P(\overline{C})}=\frac{P(A\overline{C})+P(B\overline{C})}{P(\overline{C})}=P(A|\overline{C})+P(B|\overline{C})$$

故选（C）

（9）总体 $X\sim N(2,4)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自 X 的样本，$\bar{X}$ 为样本均值，则（　　）

（A）$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\sim\chi^2(n-1)$.　　（B）$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-2)^2\sim\chi^2(n-1)$.

（C）$\sum_{i=1}^{n}(\frac{X_i-2}{2})^2\sim\chi^2(n)$.　　（D）$\sum_{i=1}^{n}(\frac{X_i-\bar{X}}{2})^2\sim\chi^2(n)$.

【答案】（C）.

【解析】由于 $X_i\sim N(2,2^2)$，则 $\frac{X_i-2}{2}\sim N(0,1)$，故 $\left(\frac{X_i-2}{2}\right)^2\sim\chi^2(1)$，又因为 $\left(\frac{X_i-2}{2}\right)^2,i=1,\ldots,n$ 之间相互独立，则 $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-2}{2}\right)^2\sim\chi^2(n)$，故（C）为正确选项。

（10）设随机变量 X,Y 相互独立且均服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，若概率 $P(aX-bY<\mu)=\frac{1}{2}$ 则（　　）

（A）$a=\frac{1}{2},b=\frac{1}{2}$.　（B）$a=\frac{1}{2},b=-\frac{1}{2}$.　（C）$a=-\frac{1}{2},b=\frac{1}{2}$.　（D）$a=-\frac{1}{2},b=-\frac{1}{2}$.

【答案】（B）.

【解析】因为 $aX-bY$ 服从正态分布，故根据题设 $P(aX-bY<\mu)=\frac{1}{2}$ 可知，

$$E(aX-bY)=aE(X)-bE(Y)=(a-b)\mu=\mu,$$

从而有 $a-b=1$.因此，（B）为正确选项。

二、填空题：11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（11）设函数 $f(x,y)$ 具有连续偏导数，且 $f(x,2x^2-3x+4)=x$，$f_x(1,3)=2$，则 $f_y(1,3)=$_____.

【答案】-1.

【解析】方程 $f(x,2x^2-3x+4)=x$ 两边对 x 求导，得

$$f_x(x,2x^2-3x+4)+f_y(x,2x^2-3x+4)\cdot(4x-3)=1,$$

令 $x=1$，得 $f_x(1,3)+f_y(1,3)=1$，故 $f_y(1,3)=-1$.

（12）方程 $\int_0^x xf(x-t)dt=\frac{1}{3}x^3+\int_0^x f(t)dt$ 满足 $f(0)=0$ 的特解为________.

【答案】$f(x)=\frac{2x^3-3x^2}{3(x-1)^2}$.

【解析】令 $x-t=u$，则原方程变为

$$x\int_0^x f(u)du=\frac{1}{3}x^3+\int_0^x f(t)dt,$$

方程两边对 x 求导得 $\int_0^x f(u)du + xf(x) = x^2 + f(x)$，两边再次对 x 求导可得

$$f(x) + f(x) + xf'(x) = 2x + f'(x) \Rightarrow f'(x) + \frac{2}{x-1}f(x) = \frac{2x}{x-1},$$

$$f(x) = e^{-\int\frac{2}{x-1}dx}[\int \frac{2x}{x-1}e^{\int\frac{2}{x-1}dx}dx + C] = \frac{2x^3 - 3x^2 + C}{3(x-1)^2}$$

再由 $f(0)=0$ 得 $C=0$，故 $f(x) = \dfrac{2x^3 - 3x^2}{3(x-1)^2}$.

（13）设 $\sum = \{(x,y,z) | x+y+z=1, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\}$, 则 $\iint\limits_{\Sigma} y^2 dS =$ ________。

【答案】$\dfrac{\sqrt{3}}{12}$

【解析】由曲面积分的计算公式可知 $\iint\limits_{\Sigma} y^2 dS = \iint\limits_{D} y^2 \sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}dxdy = \sqrt{3}\iint\limits_{D} y^2 dxdy$，其中 $D = \{(x,y) \mid x\ge 0, y\ge 0, x+y\le 1\}$。故原式 $= \sqrt{3}\int_0^1 dy\int_0^{1-y} y^2 dx = \sqrt{3}\int_0^1 y^2(1-y)dy = \dfrac{\sqrt{3}}{12}$

（14）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n\cdot 2^n}(x+1)^{n-1}$ 的收敛域是_____

【答案】$(-3,1]$

【解析】：由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(-1)^{n+1} n\cdot 2^n}{(-1)^n(n+1)\cdot 2^{n+1}}\right| = \dfrac{1}{2}$，可知收敛半径为 $R=2$，收敛区间为 $(-3,1)$。

又由于当 $x=1$ 时，原级数为 $\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$，此时级数是收敛的。故 $x=1$ 在收敛域内。此外，当 $x=-3$ 时，原级数为 $\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{-1}{n}$，此时级数是发散的。故 $x=-3$ 不在收敛域内。

因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\cdot 2^n}(x+1)^{n-1}$ 收敛域为 $(-3,1]$.

（15）设 A 是三阶矩阵，已知 $|A+E|=0, |A+2E|=0, |A+3E|=0$，其中 B 与 A 相似，则与 B 相似的对角矩阵为________.

【答案】$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -2 & \\ & & -3 \end{pmatrix}$

【解析】由 $|A+E|=0, |A+2E|=0, |A+3E|=0$，可知 A 的特征值为 $\lambda_1=-1, \lambda_{12}=-2, \lambda_3=-3$。因为

相似矩阵具有相同的特征值，所以 B 的特征值也为 $\lambda_1=-1,\lambda_{12}=-2,\lambda_3=-3$，则与 B 相似的对角矩阵

为$\begin{pmatrix}-1 & & \\ & -2 & \\ & & -3\end{pmatrix}$.

（16）设 10 件产品中有 4 件不合格品，从中任取两件，已知所取的两件产品中有一件是不合格品，则另一件也是不合格品的概率为_________.

【答案】0.2.

【解析】设 A：“所取的两件产品中至少有一件事不合格品”，B：“所取的两件都是不合格品”

因为 $P(A)=1-P(\bar{A})=1-(C_6^2/C_{10}^2)=\dfrac{2}{3}$，$P(B)=C_4^2/C_{10}^2)=\dfrac{2}{15}$,所以

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{1}{5}.$$

三、解答题：17～22 小题，共 70 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（17）设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处有 $f(0)=0$，$f'(0)=-2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \ln\cos(x-t)dt}{\sqrt{1-2f^2(x)}-1}$.

【答案】0

【解析】由 $f(0)=0$，$f'(0)=-2$ 可知，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=-2$，于是当 $x\to 0$ 时，$f(x)$等价于 $-2x$.故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \ln\cos(x-t)dt}{\sqrt{1-2f^2(x)}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_x^0 \ln\cos u\cdot(-du)}{\frac{1}{2}\cdot\left(-2f^2(x)\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \ln\cos u\cdot du}{-f^2(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \ln\cos u\cdot du}{-4x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{-8x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{-8}=0.$$

（18）设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $\int_0^x f(x-t)e^{\frac{t}{n}}dt=\cos x$.

(I)求 $f(x)$；(II)设 $a_n=f(0)$，求级数 $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{2^{n+1}}$ 的和.

【答案】(I) $f(x)=-\dfrac{1}{n}\cos x-\sin x$；(II) $1-\dfrac{1}{2}\ln 2$

【解析】(I)令 $u=x-t$，则 $\int_0^x f(x-t)\mathrm{e}^{\frac{t}{n}}dt=-\int_x^0 f(u)\mathrm{e}^{\frac{x-u}{n}}du=\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}\int_0^x f(u)\mathrm{e}^{-\frac{u}{n}}du$，

故 $\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}\int_0^x f(u)\mathrm{e}^{-\frac{u}{n}}du=\cos x$，即 $\int_0^x f(u)\mathrm{e}^{-\frac{u}{n}}du=\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}\cos x$，

上式两边对 x 求导，得 $f(x)\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}=-\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}\sin x$，

即 $f(x)=-\frac{1}{n}\cos x-\sin x$.

(II) $a_n=f(0)=-\frac{1}{n}$，级数 $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^{n+1}}=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^{n+1}}$，

$$s(x)=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n}=1-x\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}dx=1-x\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=1+x\ln(1-x),\ |x|<1$$

故 $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^{n+1}}=s(\frac{1}{2})=1-\frac{1}{2}\ln 2$.

（19）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间(0,1)内大于零，并满足 $xf(x)=f(x)+\frac{3a}{2}x^2$（$a$ 为常数），又曲线 $y=f(x)$ 与 $x=1,y=0$ 所围的图形 S 的面积值为 2，求函数 $y=f(x)$, 并问 a 为何值时，图形 S 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积最小.

【答案】$a=-5$

【解析】由题设知，当 $x\neq 0$时,

$$\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{3a}{2}$$

即
$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{x}\right]=\frac{3a}{2},$$

根据此并由 $f(x)$在点$x=0$ 处的连续性，得

$$f(x)=\frac{3ax^2}{2}+Cx,x\in[0,1]$$

又由已知条件得

$$2=\int_0^1(\frac{3}{2}ax^2+Cx)dx=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}C$$

即 $C=4-a$.

因此 $f(x)=\frac{3}{2}ax^2+(4-a)x.$

旋转体的体积为 $V(a)=\pi\int_0^1 f^2(x)dx=\pi\int_0^1\left[\frac{3}{2}ax^2+(4-a)x\right]^2dx\ =(\frac{1}{30}a^2+\frac{1}{3}a+\frac{16}{3})\pi$

$$V'(a)=(\frac{1}{15}a+\frac{1}{3})\pi=0$$

得 $a=-5.$，又因 $V''(a)=\frac{1}{15}>0$

故 $a=-5$ 时，旋转体体积最小.

（20）计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy,$ 其中 $\sum$ 是曲面 $z=1-x^2-y^2(z\geq 0)$ 的上侧.

【答案】$-\pi$

【详解】运用补面法，.取 $\sum_1$ 为 xoy 平面上被圆 $x^2+y^2=1$ 所围部分的下侧，记 Ω 为由 $\sum$ 与 $\sum_1$ 围成的空间闭区域，则

$$I=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy$$

$$-\iint\limits_{\Sigma_1}2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy=I_1-I_2$$

由高斯公式：设空间闭区域 Ω 是由分段光滑的闭曲面 $\sum$ 所围成，函数 $P\left(x,y,z\right),Q\left(x,y,z\right),R\left(x,y,z\right)$ 在 Ω 上具有一阶连续偏导数，则有

$$\oiint\limits_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$$

这里 $P=2x^3,Q=2y^3,R=3(z^2-1)$，$\frac{\partial P}{\partial x}=6x^2,\frac{\partial Q}{\partial y}=6y^2,\frac{\partial R}{\partial z}=6z$，

所以 $I_1=\iiint\limits_{\Omega}6(x^2+y^2+z)dv$

利用柱面坐标：$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ z=z\end{cases}$，$0\leq r\leq 1,\ 0\leq\theta\leq 2\pi,dv=rdrd\theta dz$，有：

$$I_1=\iiint\limits_{\Omega}6(x^2+y^2+z)dxdydz=6\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1dr\int_0^{1-r^2}(z+r^2)rdz\ =2\pi$$

记 D 为 $\sum_1$ 在 xoy 平面上的投影域 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\leq 1\right\}$，则 $z=0$，$dz=0$，又 $\sum_1$ 为 $z=0(x^2+y^2\leq 1)$ 的下侧，从而：

$$I_2=\iint_{\Sigma_1}2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy=-\iint_D 3\left(0-1\right)dxdy=3\iint_D dxdy=3\pi$$

(其中 $\iint_D dxdy$ 为半径为 1 圆的面积，所以 $\iint_D dxdy=\pi\cdot 1^1=\pi$)

故 $I=I_1-I_2=2\pi-3\pi=-\pi.$

（21）已知向量组 $\beta_1=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix},\beta_2=\begin{bmatrix}a\\2\\1\end{bmatrix},\beta_3=\begin{bmatrix}b\\1\\0\end{bmatrix}$ 向量组与向量组 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix},\ \alpha_2=\begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix},\ \alpha_3=\begin{bmatrix}9\\6\\-7\end{bmatrix}$ 具有相同的秩，且 β_3 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，求 a,b 的值.

【答案】$a=15.b=5.$

【解析】

因 β_3 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，故线性方程组

$$\begin{bmatrix}1&3&9\\2&0&6\\-3&1&-7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b\\1\\0\end{bmatrix}$$

有解，对增广矩阵施行初等行变换：

$$\begin{bmatrix}1&3&9&\vdots&b\\2&0&6&\vdots&1\\-3&1&-7&\vdots&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&9&\vdots&b\\0&1&2&\vdots&\dfrac{2b-1}{6}\\0&0&0&\vdots&-\dfrac{b-5}{3}\end{bmatrix}$$

由非齐次线性方程有解的条件知 $-\dfrac{b-5}{3}=0$

解得 $b=5$

又因为 α_1,α_2 线性无关，$\alpha_3=3\alpha_1+2\alpha_2$

所以向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的秩为 2，而题设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 β_1,β_2,β_3 同秩，

从而有

$$|\beta_1,\beta_2,\beta_3|=\begin{vmatrix}0&a&5\\1&2&1\\-1&1&0\end{vmatrix}=15-a=0,$$

由此解得 $a=15.$

（22）设总体 X 的概率密度函数为 $f(x,\lambda)=\dfrac{1}{2\lambda}e^{-|x|/\lambda},(-\infty<x<+\infty)$，其中 $\lambda>0$。$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是

总体 X 的一个容量为 n 的样本。

（I）求参数 λ 的矩估计量；

（II）求参数 λ 的最大似然估计量；

（III）说明由最大似然估计法所得 λ 的估计量是否为无偏估计量。

【答案】（I）$\hat{\lambda}^2=\sqrt{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2}$ （II）$\hat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$ （III）是

【解析】（I）$\mu_1=E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{1}{2\lambda}e^{-\frac{|x|}{\lambda}}dx=0$，

$$\mu_2=E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{1}{2\lambda}e^{-\frac{|x|}{\lambda}}dx=2\int_{0}^{+\infty}x^2\frac{1}{2\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}dx=2\lambda^2,$$

所以 $\hat{\mu}_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2=2\hat{\lambda}^2$，得 $\hat{\lambda}^2=\sqrt{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2}$.

（II）建立似然函数得：$L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda)=2^{-n}\lambda^{-n}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\lambda}}$

$$\ln L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda)=-n\ln 2-n\ln\lambda-\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\lambda},$$

由 $\frac{d\ln L}{d\lambda}=-\frac{n}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i|=0$，得 $\hat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$.故 λ 的最大似然估计量为 $\hat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$

（III）

$$E(|X|)==\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\cdot\frac{1}{2\lambda}e^{-\frac{|x|}{\lambda}}dx=2\int_{0}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{2\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}dx=\lambda,$$

所以 $E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|)=\frac{1}{n}E(\sum_{i=1}^{n}|X_i|)=\frac{1}{n}\cdot n\lambda=\lambda$。因此 $\hat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$ 是 λ 的无偏估计量。