# 2023 数学二模拟测试题详解

（本试卷满分 150 分，考试时间 180 分钟）

**一、选择题：1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.**

（1）$x\to 0$时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$是比$x\sin x^n$高阶的无穷小，而$x\sin x^n$是比$e^{x^2}-1$高阶的无穷小，则正整数$n$等于（　）

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

【答案】(B).

【解析】由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\ln(1+x^2)}{x\sin x^n}=0\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^4}{x^{n+1}}=0\Rightarrow\lim_{x\to 0}x^{3-n}=0\Rightarrow 3-n>0\Rightarrow n<3,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x^n}{e^{x^2}-1}=0\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{x^{n+1}}{x^2}=0=\lim_{x\to 0}x^{n-1}=0\Rightarrow n-1>0\Rightarrow n>1,$$

又因为$n$为正整数，故$n=2$.

（2）设函数$f(x)=\dfrac{x}{a+e^{bx}}$在$(-\infty,+\infty)$内连续，且$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，则常数$a,b$应满足

（A）$a<0,b<0.$　　（B）$a>0,b>0.$　　（C）$a\le 0,b>0.$　　（D）$a\ge 0,b<0.$

【答案】(D).

【解析】$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0\Rightarrow b<0;\ f(x)\text{连续}\Rightarrow a\ge 0$.

(3) $f(x)$是在$(0,+\infty)$内单调增加的连续函数，对任何$b>a>0$，记$M=\int_a^b xf(x)dx$，$N=\dfrac{1}{2}[b\int_0^b f(x)dx-a\int_0^a f(x)dx]$，则必有（　）.

（A）$M\ge N$.　　（B）$M\le N$.　　（C）$M=N$.　　（D）$M=2N$.

【答案】(A).

【解析】设$F(x)=\int_a^x tf(t)dt-\dfrac{1}{2}x\int_0^x f(t)dt+\dfrac{1}{2}a\int_0^a f(t)dt,x\in[a,b]$，则有

$$F'(x)=xf(x)-\frac{1}{2}\int_0^x f(t)dt-\frac{1}{2}xf(x)$$
$$=\frac{1}{2}xf(x)-\frac{1}{2}\int_0^x f(t)dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^x[f(x)-f(t)]dt$$

由于$f(x)$为单调递增函数，则$F'(x)\ge 0$，从而$F(x)$为单调增函数，且$F(a)=0$, 故$F(b)\ge F(a)=0$，即$\int_a^b tf(t)dt-\frac{1}{2}b\int_0^b f(t)dt+\frac{1}{2}a\int_0^a f(t)dt\ge 0\Rightarrow\int_a^b tf(t)dt\ge\frac{1}{2}b\int_0^b f(t)dt-\frac{1}{2}a\int_0^a f(t)dt$

综上得$M\ge N$

因此（A）为正确选项。

(4) 曲线 $y=\frac{1}{x}+\ln\left(1+e^x\right)$ 的渐近线条数为（　　）

（A）1 条.　　（B）2 条.　　(C)3 条.　　(D) 4 条.

【答案】(C).

【解析】由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}+\ln\left(1+e^x\right)=\infty$，故 $y=\frac{1}{x}+\ln\left(1+e^x\right)$ 有垂直渐近线 $x=0$。由

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}+\ln\left(1+e^x\right)=0$，故 $y=\frac{1}{x}+\ln\left(1+e^x\right)$ 有水平渐近线 $y=0$。又因 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+\ln\left(1+e^x\right)}{x}=1$，

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\ln\left(1+e^x\right)-x=0$，故 $y=\frac{1}{x}+\ln\left(1+e^x\right)$ 有斜渐近线 $y=x$。

综上可知，$y=\frac{1}{x}+\ln\left(1+e^x\right)$ 有 3 条渐近线，因此（C）为正确选项。

(5) 累次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$ 可以写成（　　）

（A） $\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y-y^2}}f(x,y)dx$.　　（B） $\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$.

（C） $\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$.　　（D） $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x-x^2}}f(x,y)dy$.

【答案】(D).

【解析】积分区域：$0\le\theta\le\frac{\pi}{2},0\le r\le\cos\theta$，化为直角坐标表示为$0\le x\le 1,0\le y\le\sqrt{x-x^2}$，因此，（D）为正确选项。

(6) 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续，$\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处间断，又 $f(a)\ne 0$，则（　　）

（A） $\varphi(f(x))$ 在 $x=a$ 处间断.　　（B） $f(\varphi(x))$ 在 $x=a$ 处间断.

（C） $(\varphi(x))^2$ 在 $x=a$ 处间断.　　（D） $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 在 $x=a$ 处间断.

【答案】(D).

【解析】可以利用举反例来排除错误选项。

对于（A）(B)，令 $f(x)=a$，$\varphi(x)=\begin{cases}1,x\ne a\\0,x=a\end{cases}$，显然 $f(x)$ $\varphi(x)$ 满足题目中条件，但

$\varphi(f(x))=0, f(\varphi(x))=a$ 均连续，因此（A）(B)错误。

对于(C)，令 $\varphi(x)=\begin{cases}1, x\neq a\\ -1, x=a\end{cases}$，显然 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处间断，但 $(\varphi(x))^2=1$ 是连续的，故(C)错误。

对于(D)，可用反证法证明 $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 在 $x=a$ 处间断：假设 $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 在 $x=a$ 处连续，则由 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续可知 $\varphi(x)=\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}f(x)$ 也在 $x=a$ 处连续，与已知条件矛盾。由此可知 $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 在 $x=a$ 处间断，因此（D）为正确选项。

(7)设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x)+[f'(x)]^2=x$，且 $f'(0)=0$，则（　　）

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

(C) 点 $(0, f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，点 $(0, f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

【答案】C

【解析】令等式 $f''(x)+[f'(x)]^2=x$ 中 $x=0$，得 $f''(0)=0-\left[f'(0)\right]^2=0$，无法利用判断极值的第二充分条件，故无法判断是否为极值或拐点.

再求导数(因为下式右边存在，所以左边也存在)：

$$f'''(x)=(x-\left[f'(x)\right]^2)'=1-2f'(x)f''(x)$$

以 $x=0$ 代入，有 $f'''(0)=1$，所以点 $(0, f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点，选(C).

（8）设矩阵 $A$ 与 $B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$ 相似，则 $r(A)+r(A-2E)=$（　）.

（A）3　　（B）4　　（C）5　　（D）6

【答案】（A）

【解析】

矩阵 $A$ 与 $B$ 相似，则 $A-2E$ 与 $B-2E$ 相似，故 $r(A)+r(A-2E)=r(B)+r(B-2E)=2+1=3$.

（9）设 3 阶方阵 $A$ 的特征值是 $1,2,3$，它们所对应的特征向量依次为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，令 $P=(3\alpha_3,\alpha_1,2\alpha_2)$，则 $P^{-1}AP=$（　）.

(A) $\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

【答案】(B)

【解析】因为$3\alpha_3,\alpha_1,2\alpha_2$分别为$A$的对应特征值$3,1,2$的特征向量，故$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

（10）下列矩阵中，$A$和$B$相似的是（　　）

（A）$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.　（B）$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix},B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

（C）$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.　（D）$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

【答案】（C）.

【解析】（A）中，$r\left(A\right)=1,r\left(B\right)=2$，故$A$和$B$不相似.

（B）中，$tr\left(A\right)=9,tr\left(B\right)=6$，故$A$和$B$不相似.

（D）中，$A$的特征值为$2,2,-3$，$B$的特征值为$1,3,-3$，故$A$和$B$不相似.

由排除法可知：只有（C）中矩阵$A$和$B$可能相似.事实上，在（C）中，$A$和$B$的特征值均为$2,0,0$，

由于$A$和$B$均可相似对角化，也即$A$和$B$均相似于$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，故$A$和$B$相似.故选（C）.

**二、填空题：11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分，请将答案写在答题纸指定位置上.**

（11）设函数$f(x,y)$具有连续偏导数，且$f(x,2x^2-3x+4)=x$，$f_x(1,3)=2$，则$f_y(1,3)=$______

【答案】$-1$.

【解析】方程$f(x,2x^2-3x+4)=x$两边对$x$求导，得

$$f_x(x,2x^2-3x+4)+f_y(x,2x^2-3x+4)\cdot(4x-3)=1,$$

令 $x=1$，得 $f_x(1,3)+f_y(1,3)=1$，故 $f_y(1,3)=-1$.

（12）方程 $\int_0^x xf(x-t)dt=\frac{1}{3}x^3+\int_0^x f(t)dt$ 满足 $f(0)=0$ 的特解为________.

【答案】$f(x)=\frac{2x^3-3x^2}{3(x-1)^2}$.

【解析】令 $x-t=u$，则原方程变为

$$x\int_0^x f(u)du=\frac{1}{3}x^3+\int_0^x f(t)dt,$$

方程两边对 $x$ 求导得 $\int_0^x f(u)du+xf(x)=x^2+f(x)$，两边再次对 $x$ 求导可得

$$f(x)+f(x)+xf'(x)=2x+f'(x)\Rightarrow f'(x)+\frac{2}{x-1}f(x)=\frac{2x}{x-1},$$

$$f(x)=e^{-\int\frac{2}{x-1}dx}[\int\frac{2x}{x-1}e^{\int\frac{2}{x-1}dx}dx+C]=\frac{2x^3-3x^2+C}{3(x-1)^2}$$

再由 $f(0)=0$ 得 $C=0$，故 $f(x)=\frac{2x^3-3x^2}{3(x-1)^2}$.

（13）设 $y=e^x\left(c_1\sin x+c_2\cos x\right)$（$c_1,c_2$ 为任意常数）为某二阶常系数齐次线性方程的通解，则该方程为________

【答案】：$y''-2y'+2y=0$.

【解析】：由于通解为 $y=e^x\left(c_1\sin x+c_2\cos x\right)$，可知该二阶常系数齐次线性方程有一对共轭的虚根 $1\pm i$，故特征方程为 $\lambda^2-2\lambda+2=0$。因此原方程为 $y''-2y'+2y=0$.

（14）$\int_{-2}^{2}\frac{x+|x|}{2+x^2}dx=$________

【答案】$\ln 3$.

【解析】

$$\int_{-2}^{2}\frac{x+|x|}{2+x^2}dx=\int_{-2}^{2}\frac{x}{2+x^2}dx+\int_{-2}^{2}\frac{|x|}{2+x^2}dx=0+2\int_0^2\frac{x}{2+x^2}dx$$
$$=\int_0^2\frac{1}{2+x^2}dx^2=\ln\left(2+x^2\right)\Big|_0^2=\ln 3.$$

（15）设 $y=\left(\sin x\right)^{\cos^2 x}$，则 $dy=$________

【答案】$dy=\left(\sin x\right)^{\cos^2 x}\left[-\sin\left(2x\right)\ln\left(\sin x\right)+\frac{\cos^3 x}{\sin x}\right]dx$.

【解析】易知 $\ln y=\cos^2 x\ln\left(\sin x\right)$，两边同时对 $x$ 求导得

$$\frac{y'}{y}=2\cos x(-\sin x)\ln(\sin x)+\cos^2 x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}=-\sin(2x)\ln(\sin x)+\frac{\cos^3 x}{\sin x},$$

所以，$y'=(\sin x)^{\cos^2 x}\left[-\sin(2x)\ln(\sin x)+\frac{\cos^3 x}{\sin x}\right]$.

（16）设 $A$ 是三阶矩阵，已知 $|A+E|=0,|A+2E|=0,|A+3E|=0$，其中 $B$ 与 $A$ 相似，则与 $B$ 相似的对角矩阵为________.

【答案】$\begin{pmatrix}-1&&\\&-2&\\&&-3\end{pmatrix}$

【解析】：由 $|A+E|=0,|A+2E|=0,|A+3E|=0$，可知 $A$ 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_{12}=-2,\lambda_3=-3$。因为相似矩阵具有相同的特征值，所以 $B$ 的特征值也为 $\lambda_1=-1,\lambda_{12}=-2,\lambda_3=-3$，则与 $B$ 相似的对角矩阵为 $\begin{pmatrix}-1&&\\&-2&\\&&-3\end{pmatrix}$.

**三、解答题：17～22 小题，共 70 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

（17）设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处有 $f(0)=0$，$f'(0)=-2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \ln\cos(x-t)dt}{\sqrt{1-2f^2(x)}-1}$.

【答案】0

【解析】由 $f(0)=0$，$f'(0)=-2$ 可知，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=-2$，于是当 $x\to 0$ 时，$f(x)$等价于 $-2x$. 故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \ln\cos(x-t)dt}{\sqrt{1-2f^2(x)}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_x^0 \ln\cos u\cdot(-du)}{\frac{1}{2}\cdot\left(-2f^2(x)\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \ln\cos u\cdot du}{-f^2(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \ln\cos u\cdot du}{-4x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{-8x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{-8}=0.$$

(18) 计算积分 $\int\dfrac{\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}}{x}dx$.

【答案】$2\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}-\ln x+\arctan^2\sqrt{x-1}+C.$

【解析】做变量替换令 $\sqrt{x-1}=t$，则 $x=t^2+1$，$dx=2tdt$，所以

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}}{x}dx &= \int \frac{t\arctan t}{t^2+1}2tdt \\
&= \int 2\arctan tdt - \int \frac{2\arctan t}{t^2+1}dt \\
&= 2t\arctan t - \int \frac{2t}{1+t^2}dt - \int 2\arctan td\arctan t \\
&= 2t\arctan t - \ln\left(1+t^2\right) + \arctan^2 t + C \\
&= 2\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1} - \ln x + \arctan^2\sqrt{x-1} + C.
\end{aligned}
$$

（19）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 内大于零，并满足 $xf(x)=f(x)+\frac{3a}{2}x^2$（$a$ 为常数），又曲线 $y=f(x)$ 与 $x=1, y=0$ 所围的图形 S 的面积值为 2，求函数 $y=f(x)$, 并问 $a$ 为何值时，图形 $S$ 绕 $x$ 轴旋转一周所得的旋转体的体积最小.

【答案】$a=-5$

【解析】由题设知，当 $x\neq 0$时,

$$\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{3a}{2}$$

即
$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{x}\right]=\frac{3a}{2},$$

根据此并由 $f(x)$在点$x=0$ 处的连续性，得

$$f(x)=\frac{3ax^2}{2}+Cx, x\in[0,1]$$

又由已知条件得

$$2=\int_0^1(\frac{3}{2}ax^2+Cx)dx=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}C$$

即 $C=4-a.$

因此 $f(x)=\frac{3}{2}ax^2+(4-a)x.$

旋转体的体积为$V(a)=\pi\int_0^1 f^2(x)dx=\pi\int_0^1\left[\frac{3}{2}ax^2+(4-a)x\right]^2dx=(\frac{1}{30}a^2+\frac{1}{3}a+\frac{16}{3})\pi$

$$V'(a)=(\frac{1}{15}a+\frac{1}{3})\pi=0$$

得 $a=-5.$，又因 $V''(a)=\frac{1}{15}>0$

故 $a=-5$时，旋转体体积最小.

（20）设积分区域 $D$ 是圆环 $1\le x^2+y^2\le 4$，求 $\iint\limits_D\left(2x^3+3\sin\frac{x}{y}+7\right)dxdy$ .

【答案】$21\pi$

【解析】因为积分区域 $1\le x^2+y^2\le 4$ 关于 $x$ 轴和 $y$ 轴对称，且函数 $2x^3$ 及 $\sin\frac{x}{y}$ 分别是 $x,y$ 的奇函数，故将被积函数分项积分，得

$$\begin{aligned}\iint\limits_D\left(2x^3+3\sin\frac{x}{y}+7\right)dxdy&=\iint\limits_D 2x^3dxdy+\iint\limits_D 3\sin\frac{x}{y}dxdy+\iint\limits_D 7dxdy\\&=0+0+7\iint\limits_D dxdy.\end{aligned},$$

由二重积分的几何意义，知 $\iint\limits_D dxdy=4\pi-\pi=3\pi$，故

$$\iint\limits_D\left(2x^3+3\sin\frac{x}{y}+7\right)dxdy=7\cdot 3\pi=21\pi .$$



（21）求二元函数 $f(x,y)=x^2\left(2+y^2\right)+y\ln y$ 的极值.

【答案】极小值 $f(0,\frac{1}{e})=-\frac{1}{e}$.

【解析】$f_x'(x,y)=2x(2+y^2)=0$，$f_y'(x,y)=2x^2y+\ln y+1=0$，故 $x=0,y=\frac{1}{e}$，且

$$f''_{xx}=2(2+y^2),f''_{yy}=2x^2+\frac{1}{y},f''_{xy}=4xy,$$

则

$$f''_{xx}\Big|_{(0,\frac{1}{e})}=2(2+\frac{1}{e^2}),f''_{xy}\Big|_{(0,\frac{1}{e})}=0,f''_{yy}\Big|_{(0,\frac{1}{e})}=e.$$

又因为 $f''_{xx}>0$，而 $(f''_{xy})^2-f''_{xx}f''_{yy}<0$，因此二元函数 $f(x,y)=x^2\left(2+y^2\right)+y\ln y$ 存在极小值 $f(0,\frac{1}{e})=-\frac{1}{e}$.

（22）已知向量组 $\beta_1=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix},\beta_2=\begin{bmatrix}a\\2\\1\end{bmatrix},\beta_3=\begin{bmatrix}b\\1\\0\end{bmatrix}$ 向量组与向量组 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}9\\6\\-7\end{bmatrix}$ 具有相同的秩，且 $\beta_3$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示求 a, b 的值.

【答案】$a=15.b=5.$

【解析】

因 $\beta_3$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，故线性方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 0 & 6 \\ -3 & 1 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

有解，对增广矩阵施行初等行变换：

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 & \vdots & b \\ 2 & 0 & 6 & \vdots & 1 \\ -3 & 1 & -7 & \vdots & 0 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 & \vdots & b \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & \dfrac{2b-1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -\dfrac{b-5}{3} \end{bmatrix}$$

由非齐次线性方程有解的条件知$-\dfrac{b-5}{3}=0$

解得$b=5$

又因为$\alpha_1,\alpha_2$线性无关，$\alpha_3=3\alpha_1+2\alpha_2$

所以向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩为 2，而题设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3$同秩，

从而有

$$|\beta_1,\beta_2,\beta_3|=\begin{vmatrix} 0 & a & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=15-a=0,$$

由此解得$a=15.$